

FACH: **Höhere Mathematik 2 (2.Teil)**

NAME:

DATUM: 11.07.2007

SEMESTER: P4

ZEIT: 09.00. – 10.30h

PRÜFER: Horak

HILFSMITTEL: Manuskript, Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner

HINWEISE:

Verlangt ist die Bearbeitung **zweier** Aufgaben: Aufgabe A3 ist Pflicht, **Wahl** zwischen **A1**, **A2** und **A4**. Die Benutzung eines Lineals / Geodreiecks wird dringend empfohlen! Ergebnisse ohne vorherigen gültigen Ansatz können nicht gewertet werden: Die alleinige Angabe einer Zahl ohne weiteren Kommentar reicht nicht aus! Sämtliche Ergebnisse sind ggf. auf 4 Dezimalen zu runden, wenn in der Aufgabe darüber nichts anderes vermerkt ist.

Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Bogen!

AUFGABE 1: (Wahl)

Die 2π – periodische Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{\pi} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \\ \frac{3}{\pi} \cdot (\pi - x) & \text{für } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Skizzieren Sie das Schaubild von f im Bereich $-\pi \leq x \leq +\pi$.
Handelt es sich bei f um eine gerade oder ungerade Funktion?
- b) Ermitteln Sie die zugehörige Fourier-Reihe von f .

Hinweis: Die Verwendung der Formel $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

ist bei einer Zusammenfassung am Ende sehr zu empfehlen!

- c) Man bestimme mit Hilfe der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ den Wert der Reihe

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + + - - \dots$$

Hinweis: Die auftretenden Nenner sind die Quadrate der ungeraden, nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

AUFGABE 2: (Wahl)

- a) Gegeben sei die Differenzialgleichung $y' - y = e^x - x \cdot (1 + \cos x)$.

Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Dgl sowie jene Lösung, die durch den Punkt $P(0 ; 2)$ hindurch geht.

- b) Die Dgl in Teil a) ist ein Sonderfall der folgenden Dgl:

$$y' - a \cdot y = e^{bx} - x \cdot (1 + \cos x) \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{mit } a \neq 0$$

Gesucht sind alle Lösungen dieser Dgl mit Unterscheidung der beiden Fälle $a = b$ bzw. $a \neq b$.

Achten Sie auf das Vorliegen eventueller Resonanzfälle!

AUFGABE 3: (Pflicht)

- a) Man zeige, dass die Differenzialgleichung $x \cdot y'' + 2 \cdot (x+1) \cdot y' + 2y = 0$

eine Lösungsfunktion $u(x) = x^\alpha$ besitzt und bestimme den zugehörigen Exponenten α .

- b) Man ermittle nun die allgemeine homogene Lösung der obigen Dgl aus Teil a) mit Hilfe des Ansatzes $y_H(x) = u(x) \cdot z(x)$ und weise nach, dass dies auf die Lösung folgender Dgl führt: $z'' + 2z' = 0$

Kontrollergebnis: $y_H = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x} \cdot e^{-2x}.$

- c) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Dgl

$$x \cdot y'' + 2 \cdot (x+1) \cdot y' + 2y = 1 - e^{-2x} \quad ; \quad x \neq 0$$

durch Variation der Konstanten nach Lagrange.

Geben Sie für diese Lösung einen möglichst einfachen Ausdruck an!

AUFGABE 4 (WAHL):

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2xy \\ z^2 - x^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$ sowie das Rechteck ABCD mit $A(0 ; 0 ; 0)$,

$B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 2 ; 2)$ und $D(0 ; 2 ; 2)$.

a) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$. Welche Folgerungen können Sie aus den erhaltenen Werten unmittelbar ziehen?

b) Man bestimme den Wert des Linienintegrals $\int_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ längs der folgenden

Wege: (C₁) von A geradlinig über B zu C

(C₂) von A geradlinig über D zu C

(C₃) längs $\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t}{2} \\ \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}$ von A nach C.

c) Die Ergebnisse aus Teil b) legen die Vermutung nahe, dass es sich bei $\vec{v}$ um ein Gradientenfeld handeln könnte. Bestätigen oder widerlegen Sie diese Vermutung!
