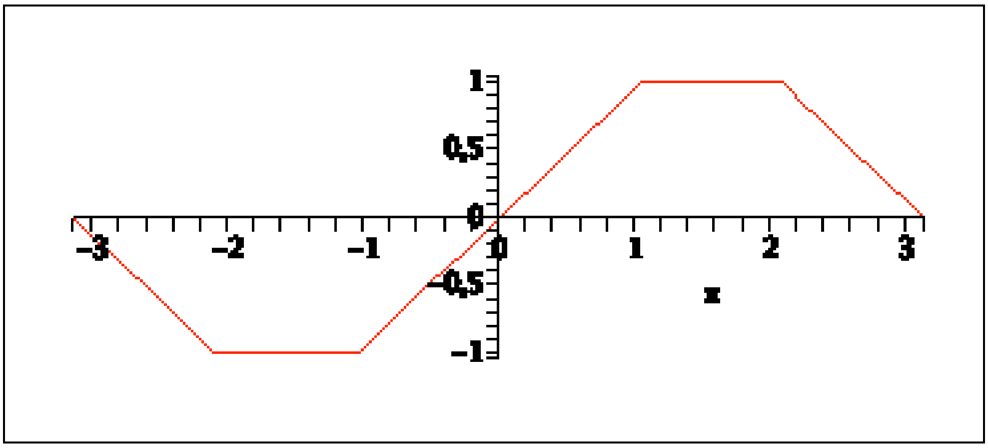
A1:

a) $f(-x) = -f(x)$, also Punktsymmetrie zum Ursprung und f ist ungerade Funktion, also $a_k = 0$:

$$f := \begin{cases} -\dfrac{3(x+\pi)}{\pi} & -\pi < x \text{ and } x < -\dfrac{2}{3}\pi \\ -1 & -\dfrac{2}{3}\pi < x \text{ and } x < -\dfrac{1}{3}\pi \\ \dfrac{3x}{\pi} & -\dfrac{1}{3}\pi < x \text{ and } x < \dfrac{1}{3}\pi \\ 1 & \dfrac{1}{3}\pi < x \text{ and } x < \dfrac{2}{3}\pi \\ \dfrac{3(\pi - x)}{\pi} & \dfrac{2}{3}\pi < x \text{ and } x < \pi \end{cases}$$



b) Da die Randfunktion sich **ändert**, muss die Integration in den 3 Teilfunktionen durchgeführt werden:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\cdot\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3x}{\pi}\cdot \sin kx\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 1\cdot \sin kx\,dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(3 - \frac{3x}{\pi}\right)\cdot \sin kx\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{\pi}\cdot\left[\dfrac{\sin kx}{k^2} - \dfrac{x\cdot\cos kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \dfrac{1}{k}\cdot\left[\cos kx\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} - \dfrac{3}{k}\cdot\left[\cos kx\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\ -\dfrac{3}{\pi}\cdot\left[\dfrac{\sin kx}{k^2} - \dfrac{x\cdot\cos kx}{k}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{\pi k^2}\cdot\sin\dfrac{k\pi}{3} - \dfrac{1}{k}\cdot\cos\dfrac{k\pi}{3} - \dfrac{1}{k}\cdot\cos\dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{1}{k}\cdot\cos\dfrac{k\pi}{3} - \dfrac{3}{k}\cdot\cos k\pi + \\ + \dfrac{3}{k}\cdot\cos\dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{3}{k}\cdot\cos k\pi + \dfrac{3}{\pi k^2}\cdot\sin\dfrac{2k\pi}{3} - \dfrac{2}{k}\cdot\cos\dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{6}{\pi^2 k^2}\cdot\left(\sin\frac{k\pi}{3} + \sin\frac{2k\pi}{3}\right) = \frac{12}{\pi^2 k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\cos\frac{k\pi}{6}. \qquad \text{(nach Formel)}$$

Wegen des Sinus-Terms werden alle b_k für **gerade k** gleich Null; Analoges folgt aus dem Kosinus-Term: b_k wird Null für alle **ungeraden, durch 3 teilbaren** k.

Die daraus resultierende Fourier-Reihe lautet also:

$$f(x)=\frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 5x}{5^2}+\frac{\sin 7x}{7^2}-\frac{\sin 11x}{11^2}+\frac{\sin 13x}{13^2}+\ldots\right)$$

$$c)\qquad x=\frac{\pi}{2}\quad\rightarrow\quad f(\frac{\pi}{2})=1$$

$$1=\frac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\cdot\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}-\frac{1}{17^2}-\frac{1}{19^2}\pm\ldots\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}-\frac{1}{17^2}-\frac{1}{19^2}\pm\ldots\right)=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

A2:

Bevor man an die Lösung der Aufgabe geht, sollte man kurz überlegen, ob man entweder mit Teil b) beginnt, dort die allgemeine Lösung ermittelt und anschließend den Sonderfall Teil a) durch Einsetzen der Parameterwerte für a und b. Alternativ könnte man aber auch mit Teil a) beginnen, weil hier der GTR im Vergleich zum anderen Weg bei den erforderlichen Integrationen gute Hilfe leistet.

Beispiellösung für 2.Weg:

$a)\qquad$ *Homogene Lösung:* $\quad$ *Ansatz* $y=e^{\alpha x}\quad\Rightarrow P(\alpha)=\alpha-1=0$

$$y_H=C\cdot e^x.$$

Weiter mit VdK: $y'=C'(x)\cdot e^x+C(x)\cdot e^x$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot e^x+\underbrace{C(x)\cdot e^x-C(x)\cdot e^x}_{=0}=e^x-x\left(1+\cos x\right)$$

$$\Rightarrow C'(x)=1-x\left(1+\cos x\right)\cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow C(x)=x+e^{-x}\cdot\left(x+1\right)+\frac{x\cdot e^{-x}}{2}\cdot\left(\cos x-\sin x\right)+\frac{e^{-x}}{4}\cdot\left(-2\sin x\right)+K\quad (GTR)$$

$$\Rightarrow y_{\text{allg}}=x\cdot e^x+x+1+\frac{x}{2}\cdot\left(\cos x-\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin x+K\cdot e^x=$$

$$=K\cdot e^x+x\cdot e^x+\left(x+1\right)\left(1-\frac{\sin x}{2}\right)+\frac{x}{2}\cdot\cos x.$$

AWP: $\quad y(0)=2\quad\Rightarrow\quad 2=K+1,\quad also\quad K=1.$

$$\Rightarrow y_{spez}=\left(x+1\right)\left(e^x+1-\frac{\sin x}{2}\right)+\frac{x}{2}\cdot\cos x.$$

$b)\qquad$ *Homogene Lösung:* $\quad\Rightarrow P(\alpha)=\alpha-a=0\quad\Rightarrow y_H=C\cdot e^{ax}.$

Inhomogene Lösung über Störansatz mit Fallunterscheidung:

1. Fall: a = b $\qquad$ einfache Resonanz zu $g_1(x)=e^{ax}$

$$\Rightarrow y_{P_1}=\frac{x\cdot e^{ax}}{P'(a)}=\frac{x\cdot e^{ax}}{1}=x\cdot e^{ax}.$$

2. Fall: a $\neq$ b *keine* Resonanz zu $g_1(x)=e^{bx}$

$$\Rightarrow y_{P_1} = \frac{e^{bx}}{P(b)} = \frac{e^{bx}}{b-a} \;.$$

$g_2(x) = -x:$ $\Rightarrow y_{P_2} = Ax + B \quad ; \quad y_{P_2}{}' = A \quad \Rightarrow A - a \cdot (Ax+B) = -x$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{a} \quad ; \quad A - aB = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{a^2}. \qquad \Rightarrow y_{P_2} = \frac{1}{a} \cdot \left(x + \frac{1}{a} \right).$$

$g_3(x) = -x \cdot \cos x:$ *keine* Resonanz

$$\Rightarrow y_{P_3} = \left(Ax+B\right) \cdot \sin x + \left(CX + D\right) \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow y_{P_3}{}' = \left(A - Cx - D\right) \cdot \sin x + \left(Ax + B + C\right) \cdot \cos x$$

in Dgl : $\left(A - Cx - D\right) \cdot \sin x + \left(Ax + B + C\right) \cdot \cos x$

$$- a \cdot \left\{ \left(Ax+B\right) \cdot \sin x + \left(Cx+D\right) \cdot \cos x \right\} = - x \cdot \cos x$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & C + aA = 0 \\ (2) & A - aC = -1 \\ (3) & A - D - aB = 0 \\ (4) & B + C - aD = 0 \end{array}\right\} \quad A = \frac{-1}{a^2+1}; \quad C = \frac{a}{a^2+1}; \quad D = \frac{a^2-1}{\left(a^2+1\right)^2};$$

$$B = \frac{-2a}{\left(a^2+1\right)^2}.$$

$$\Rightarrow y_{P_3} = \frac{-1}{a^2+1} \cdot \left(x + \frac{2a}{a^2+1} \right) \cdot \sin x + \frac{1}{a^2+1} \cdot \left(ax + \frac{a^2-1}{a^2+1} \right) \cdot \cos x$$

Allgemeine Lösung:

$$y_{\text{allg}} = \left\{ \begin{array}{ll} x \cdot e^{ax} & \text{für } a = b \\ \dfrac{e^{bx}}{b-a} & \text{für } a \neq b \end{array} \right\} + \frac{1}{a} \cdot \left(x + \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{a^2+1} \cdot \left(x + \frac{2a}{a^2+1} \right) \cdot \sin x$$

$$+ \frac{1}{a^2+1} \cdot \left(ax + \frac{a^2-1}{a^2+1} \right) \cdot \cos x + C \cdot e^{ax}.$$

A3:

a) $x \cdot y'' + 2\left(x+1\right) \cdot y' + 2y = 0 \quad ;$ Lösungsfunktion sei $y_1 = u(x) = x^{\alpha}$

in Dgl : $x \cdot \alpha \cdot \left(\alpha - 1\right) \cdot x^{\alpha-2} + 2\left(x+1\right) \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} + 2x^{\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\alpha^2 + \alpha\right)}_{=\alpha \cdot (\alpha+1)} \cdot x^{\alpha-1} + 2\left(\alpha+1\right) \cdot x^{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$ für $\alpha = -1$ erfüllt!

also $u(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; x \neq 0.$

$$b)\quad \left.\begin{array}{l} y_H(x)=\frac{1}{x}\cdot z(x) \quad ; \quad y_H{}'(x)=\frac{-1}{x^2}\cdot z(x)+\frac{1}{x}\cdot z'(x) \\ y_H{}''(x)=\frac{2}{x^3}\cdot z(x)-\frac{2}{x^2}\cdot z'(x)+\frac{1}{x}\cdot z''(x) \end{array}\right\} \text{ in Dgl:}$$

$$x\cdot\left(\frac{2}{x^3}\cdot z(x)-\frac{2}{x^2}\cdot z'(x)+\frac{1}{x}\cdot z''(x)\right)+2(x+1)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\cdot z(x)+\frac{1}{x}\cdot z'(x)\right)+\frac{2}{x}\cdot z(x)=0$$

$$\Rightarrow \quad z''+2z'=0.$$

$$\textit{Ansatz:}\quad z(x)=e^{\lambda x} \quad\Rightarrow\quad \lambda^2+2\lambda=\lambda(\lambda+2)=0 \quad ; \quad \lambda_1=0; \quad \lambda_2=-2$$

$$\Rightarrow \quad z_H=C_1+C_2\cdot e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad y_H=\frac{C_1+C_2\cdot e^{-2x}}{x}.$$

c) Variation der Konstanten nach Lagrange verlangt <u>Normierung</u> der Dgl:

$$y''+\frac{2}{x}\cdot(x+1)\cdot y'+\frac{2}{x}\cdot y=\frac{1}{x}\cdot\left(1-e^{-2x}\right)$$

$$W(x)=\begin{Vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{e^{-2x}}{x} \\ \frac{-1}{x^2} & \frac{-e^{-2x}}{x^2}\cdot(2x+1) \end{Vmatrix}=\frac{-2}{x^2}\cdot e^{-2x}\neq 0 \quad ; x\neq 0$$

$$C_1{}'(x)=-\frac{x^2}{2}\cdot e^{2x}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & \frac{e^{-2x}}{x} \\ \frac{1}{x}\cdot\left(1-e^{-2x}\right) & \frac{-e^{-2x}}{x^2}\cdot(2x+1) \end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-2x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_1(x)=\frac{x}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}+K_1.$$

$$C_2{}'(x)=-\frac{x^2}{2}\cdot e^{2x}\cdot\begin{Vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{-1}{x^2} & \frac{1}{x}\cdot\left(1-e^{-2x}\right) \end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{2x}\right)$$

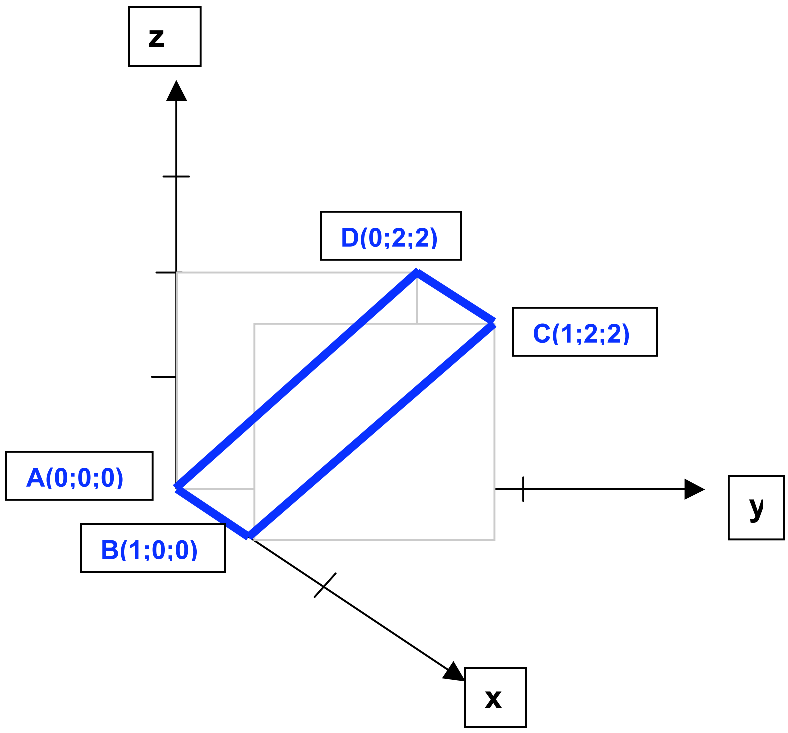
$$\Rightarrow \quad C_2(x)=\frac{x}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+K_2.$$

Damit:

$$y_{\text{allg}}=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}+K_1\right)+\frac{e^{-2x}}{x}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+K_2\right)=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(1+e^{-2x}\right)}_{=y_P}+\underbrace{\frac{K_1^*}{x}+\frac{K_2^*}{x}\cdot e^{-2x}}_{=Y_H}$$

$$\textit{mit}\quad K_1^*=K_1-\frac{1}{4} \quad \textit{und} \quad K_2^*=K_2+\frac{1}{4}.$$

<u>A4:</u> Vektorfeld $\vec{v}=\begin{pmatrix} -2xy \\ z^2-x^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$; Rechteck ABCD a)



$$div\,\vec{v} = -2y + 0 + 2y = 0 \quad ; \quad rot\,\vec{v} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2xy & z^2 - x^2 & 2yz \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - 2z \\ 0 - 0 \\ -2x + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also liegt ein **wirbelfreies** Feld vor **ohne Quellen und Senken,** das darüber hinaus ein **Gradientenfeld** ist.

b) (C_{11}) $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad ; \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow J_{11} = \int_0^1 -2t \cdot 0 \, dt = 0$

(C_{12}) $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad ; \quad 0 \le t \le 2 \quad \Rightarrow J_{12} = \int_0^2 \left(t^2 - 1 + 2t^2\right) dt =$

$= \left[t^3 - t\right]_0^2 = 6.$

$$\Rightarrow \oint_{(C_1)} \vec{v}\,\overrightarrow{dr} = 6.$$

(C_{21}) $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad ; \quad 0 \le t \le 2 \quad \Rightarrow J_{21} = \int_0^2 \left(t^2 + 2t^2\right) dt =$

$= \left[t^3\right]_0^2 = 8.$

$$(C_{22}) \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad ; \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow J_{22} = \int_0^1 \left(-4t\right) dt =$$

$$= \left[-2t^2\right]_0^1 = -2.$$

$$\Rightarrow \oint_{(C_2)} \vec{v}\,\overrightarrow{dr} = 6.$$

$$(C_3) \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad ; \quad 0 \le t \le 2 \quad \Rightarrow J_3 = \int_0^2 \underbrace{\left(-\frac{t^3}{4} \cdot 2 + t^3 \cdot 2\right)}_{=\frac{3t^3}{2}} dt =$$

$$= \left[\frac{3t^4}{8}\right]_0^2 = 6.$$

$$\Rightarrow \oint_{(C_3)} \vec{v}\,\overrightarrow{dr} = 6.$$

c) Da in Teil a) bereits gezeigt wurde, dass die Rotation verschwindet, liegt also ein Gradientenfeld vor:

$$\vec{v} = grad\ u \quad mit \ \frac{\partial u}{\partial x} = -2xy \quad \Rightarrow \quad u = -x^2 \cdot y + \phi\left(y, z\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 + \frac{\partial \phi}{\partial y} \doteq z^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = z^2 \quad \Rightarrow \quad \phi = z^2 \cdot y + \Psi(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2yz + \Psi'(z) \doteq 2yz \quad \Rightarrow \quad \Psi(z) = C.$$

$$also \quad u(x, y, z) = -x^2 \cdot y + z^2 \cdot y + C = y \cdot \left(z^2 - x^2\right) + C.$$

$$\Rightarrow u_C - u_A = 2 \cdot \left(4 - 1\right) + C - \left(0 + C\right) = 6. \qquad \text{qed}$$