A1) a) $\boxed{y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0}$

Charakt. Polynom: $P(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 0 = \left(\alpha - 1\right)^2 \cdot \left(\alpha^2 + 4\right)$

$\Rightarrow \boxed{y_H = C_1 \cdot e^x + C_2 x \cdot e^x + C_3 \cdot \cos 2x + C_4 \cdot \sin 2x}$

b) Störfunktion $g_1(x) = 5 \cdot e^x \quad \Rightarrow$ doppelte Resonanz zu α=1 (r=2)

$\Rightarrow y_{P_1} = \frac{x^2 \cdot 5e^x}{P''(1)} = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x \quad mit\ P''(\alpha) = 12\alpha^2 - 12\alpha + 10; \quad P''(1) = 10.$

c) Störfunktion $g_2(x) = 3 \cdot \sin 2x \quad \Rightarrow$ einfache Resonanz zu α=2i (r=1)

$$\Rightarrow y_{P_2} = \mathbf{Im}\left[x \cdot \frac{3(\cos 2x + i \cdot \sin 2x)}{\underbrace{P'(2i)}_{=-32i+24+20i-8=4(4-3i)}} \right] = \frac{3x}{100} \cdot \left(4 \sin 2x + 3 \cos 2x\right)$$

d) Störfunktion $g_3(x) = x^2 \cdot e^x \quad \Rightarrow$ doppelte Resonanz zu α=1 und quadratischer Vorfaktor

$\Rightarrow y_{P_3} = \left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot x^2 e^x$ nicht gefragt: $\left\{ konkret: \quad y_{P_3} = \frac{x^2 e^x}{5}\left(\frac{x^2}{12} - \frac{2x}{15} - \frac{1}{25}\right)\right\}$

e) Lösung zu b) für AWP: $y_{allg} = y_H + y_{P_1}$

$$\Rightarrow y' = C_1 e^x + C_2 e^x (x+1) - 2C_3 \sin 2x + 2C_4 \cos 2x + \frac{e^x}{2}\left(x^2 + 2x\right)$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^x (x+2) - 4C_3 \cos 2x - 4C_4 \sin 2x + \frac{e^x}{2}\left(x^2 + 4x + 2\right)$$

$$y''' = C_1 e^x + C_2 e^x (x+3) + 8C_3 \sin 2x - 8C_4 \cos 2x + \frac{e^x}{2}\left(x^2 + 6x + 6\right)$$

$AWP: \quad 0 = C_1 + C_3 \quad ; \quad 0 = C_1 + C_2 + 2C_4 \quad ; \quad 1 = C_1 + 2C_2 - 4C_4 \quad ; \quad -4 = C_1 + 3C_2 - 8C_4$

$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{5} \quad ; \quad C_2 = -1 \quad ; \quad C_3 = -\frac{3}{5} \quad ; \quad C_4 = \frac{1}{5}$

$$y_{spez} = \frac{3}{5} e^x - x e^x - \frac{3}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x + \frac{x^2}{2} e^x$$

A2) $\boxed{y'' + \sin x \cdot y' + \left(1 + x^2\right) \cdot y = 0}$ $mit \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$

$Ansatz: \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} \quad ;$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \cdot \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots\right)}_{n \cdot a_n x^n \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \pm \ldots\right)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \quad ;$$

$Koeff.vergleich: \quad x^0: \quad 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \underbrace{a_0}_{=2} = 0 \quad \Rightarrow a_2 = -1 \quad \left(y(0) = a_0 = 2; \quad y'(0) = a_1 = 3\right)$

$x^1: \quad 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 1 \cdot a_1 + a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_3 = -1$

$x^2: \quad 4 \cdot 3 \cdot a_4 + 2 \cdot a_2 + a_2 + a_0 = 0 \quad \Rightarrow a_4 = \frac{1}{12} \quad usw.$

$$y = 2 + 3x - x^2 - x^3 + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{120} \pm \ldots$$

$konkret: \quad y(0.5) = 3.132689$

A3) a)

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x+\dot{y}=t^2\\ (2) & \ddot{x}-2y+3\dot{y}=t\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}=2t-\ddot{y} \quad ; \quad \ddot{x}=2-\dddot{y} \quad in \quad (2):$$

$$\boxed{\dddot{y}-3\dot{y}+2y=2-t}$$

Homogene Lösung: $y(t)=e^{\alpha t} \quad \Rightarrow P(\alpha)=\alpha^3-3\alpha+2=(\alpha-1)^2\cdot(\alpha+2)=0$

$$\Rightarrow \boxed{y_H=C_1\cdot e^t+C_2\cdot t\cdot e^t+C_3\cdot e^{-2t}}$$

Inhomogene Lösung: $y_P(t)=at+b \quad in\ Dgl: \quad -3a+2at+2b=2-t$

$$\Rightarrow a=\frac{-1}{2}; \quad b=\frac{1}{4} \quad ; \quad \boxed{y_P=\frac{1}{4}(1-2t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{allg}(t)=C_1\cdot e^t+C_2\cdot t\cdot e^t+C_3\cdot e^{-2t}+\frac{1}{4}(1-2t)}$$

$$\dot{y}(t)=C_1\cdot e^t+C_2\cdot(t+1)\cdot e^t-2C_3\cdot e^{-2t}-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{allg}(t)=t^2+\frac{1}{2}-C_1\cdot e^t-C_2\cdot(t+1)\cdot e^t+2C_3\cdot e^{-2t}}$$

b)

$$\boxed{\dddot{y}-3\dot{y}+2y=2-\sinh(2t)=2-\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right)}$$

$g_1(t)=2 \quad \Rightarrow \boxed{y_{P_1}=1}.\quad g_2(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}$ keine Resonanz $;P(2)=4$

$$y_{P_2}=\frac{-\frac{1}{2}e^{2t}}{4}=\boxed{-\frac{1}{8}e^{2t}}$$

$g_3(t)=+\frac{1}{2}e^{-2t}$ einfache Resonanz $;P'(-2)=9 \quad \Rightarrow \boxed{y_{P_3}=\frac{t}{18}e^{2t}}.$

A4)

a) $\boxed{\vec{v}=\begin{pmatrix}2xz\\ yz\\ x^2+\frac{1}{2}y^2\end{pmatrix}} \quad \Rightarrow div\ \bar{v}=2z+z+0=\boxed{3z}.$ Feld ist nicht quellen- und senkenfrei

$rot\ \bar{v}=\boxed{\bar{0}}=\begin{pmatrix}y-y\\ 2x-2x\\ 0-0\end{pmatrix}$ Feld ist wirbelfrei und besitzt Gradientenfeld

b) $A(1;1;0)\to B(-2;4;3) \quad \Rightarrow \overline{r(t)}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\1+t\\t\end{pmatrix} \quad ;0\le t\le 3$

$$\Rightarrow J_1=\int_{t=0}^{3}\left(-2xz+yz+x^2+\frac{1}{2}y^2\right)dt=$$

$$=\int_{t=0}^{3}\left(-2t(1-t)+t(1+t)+(1-t)^2+\frac{1}{2}(1+t)^2\right)dt=\ldots=\int_{t=0}^{3}\left(\frac{9t^2}{2}-2t+\frac{3}{2}\right)dt=\left[\frac{3t^3}{2}-t^2+\frac{3t}{2}\right]_0^3=$$

$$=\boxed{36}.$$

c) Potenzialfeld $\mathrm{u}(x,y,z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz \quad \Rightarrow u = x^2 z + C(y,z) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = yz \quad \Rightarrow C(y,z) = \frac{1}{2} y^2 z + C(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + \frac{1}{2} y^2 + C'(z) = x^2 + \frac{1}{2} y^2 \quad \Rightarrow C(z) = const$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{u}(x,y,z) = x^2 z + \frac{1}{2} y^2 z + C} \qquad u_B - u_A = 3 \cdot 12 + C - C = \boxed{36.}$$