Lösung zu SS11:

A1)

a) $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = \cos 5x$; $y_3 = \sin 5x$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 2$; $\alpha_{2/3} = \pm 5i$

$\Leftrightarrow \quad P(\alpha) = (\alpha - 2)\cdot(\alpha^2 + 25) = \alpha^3 - 2\alpha^2 + 25\alpha - 50 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{y''' - 2y'' + 25y' - 50 = g(x)}$

Die Störfunktion g(x) muss wegen des Vorliegens von Resonanz zu α_2 mindestens inTeilen den folgenden Term enthalten: $g(x) = k_1 \cos 5x + k_2 \sin 5x$

b) Dgl 2.O mit $y_1 = e^x$; $y_2 = \cos x$ existiert nicht, da eine isolierte Lösungsfunktion $< \cos x >$ ohne das gleichzeitige Auftreten von $y_3 = \sin x$ unmöglich ist!
Dazu wäre aber eine Dgl 3.O. erforderlich.

c1) Euler-Dgl: $\boxed{x^4 \cdot y^{(4)} + 6x^3 \cdot y''' + 5x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = 0}$

Ansatz: $y = x^{\alpha}$; $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$; ... $y^{(4)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^{\alpha-4}$

$\Rightarrow P(\alpha) = (\alpha - 1)\cdot\{\alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha + 6\alpha^2 - 12\alpha + 5\alpha - 1\} = (\alpha-1)(\alpha^3 + \alpha^2 - (\alpha+1)) =$

$= (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 1) = (\alpha^2 - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha_{1/2} = 1 \ ; \ \alpha_{3/4} = -1}$ ... je doppelt

also: $y_H = C_1 \cdot x + C_2 \cdot x \cdot \ln x + C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x$

c2) Inhomogene Lösung zu $g(x) = 16x - 9x^2$: $\rightarrow$ *Aufspalten*!!

$g_1(x) = 16x$: Resonanz zu $\alpha_{1/2} = 1$; (Vielfachheit r = 2) $\Rightarrow y_{P_1} = A \cdot x \cdot \ln^2 x$

$y'_{P_1} = A \cdot (\ln^2 x + 2\ln x)$; $y''_{P_1} = A \cdot \frac{2}{x}(\ln x + 1)$; $y'''_{P_1} = A \cdot \frac{2}{x^2}(-\ln x)$

$y^{(4)}_{P_1} = A \cdot \frac{2}{x^3}(2\ln x - 1)$ in Dgl eingesetzt:

$2Ax(2\ln x - 1) - 12Ax\ln x + 10Ax(\ln x + 1) - Ax(\ln^2 x + 2\ln x) + Ax \cdot \ln^2 x \doteq 16x$

$\Leftrightarrow 8Ax = 16x \quad \Leftrightarrow \boxed{A = 2}$; $y_{P_1} = 2 \cdot x \cdot \ln^2 x$

$g_2(x) = -9x^2$: keine Resonanz, da c = $2 \notin P(\alpha)$ $\Rightarrow y_{P_2} = B \cdot x^2$

$y'_{P_2} = 2B \cdot x$; $y''_{P_2} = 2B$; $y''' = y^{(4)} = 0$ in Dgl eingesetzt:

$10Bx^2 - 2Bx^2 + Bx^2 \doteq -9x^2 \quad \Leftrightarrow 9B = -9 \quad \Leftrightarrow \boxed{B = -1}$; $y_{P_2} = -x^2$

also: $\boxed{y_{allg} = C_1 x + C_2 x \cdot \ln x + C_3 \frac{1}{x} + C_4 \frac{1}{x}\ln x + 2x\ln^2 x - x^2}$

A2)

a) $\boxed{(1-x)\cdot y'' + x\cdot y' - y = 0 \quad mit\ x>1}$; Potenzreihenansatz $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 1\cdot a_2 \cdot x^0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{n(n+1)a_{n+1} - (n^2-n)a_n\right\}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_n x^n - a_0 x^0 = 0$$

Koeffizientenvergleich:

x^0: $2a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2!}$

x^1: $6a_3 - 2a_2 + 0 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{6} = \frac{a_0}{3!}$

x^2: $12a_4 - 6a_3 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{a_2}{12} = \frac{a_0}{24} = \frac{a_0}{4!}$

x^3: $20a_5 - 12a_4 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{a_2}{60} = \frac{a_0}{120} = \frac{a_0}{5!}$

x^4: $30a_6 - 20a_5 + 3a_4 = 0 \Rightarrow a_6 = \frac{a_0}{30}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right) = \frac{a_0}{720} = \frac{a_0}{6!}$

also: $y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_0}{5!}x^5 + \frac{a_0}{6!}x^6 + \ldots$

$$= (a_1 - a_0)x + a_0\cdot\underbrace{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)}_{=e^x} \mathrel{\hat{=}} \boxed{C_1\cdot x + C_2\cdot e^x}$$

AWP: $y(0)=1 \Leftrightarrow C_1 = 1$; $y'(0)=2 \Leftrightarrow C_2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{y = x + e^x}$

b1) Behauptung: $y_1 = e^x \Rightarrow (1-x)\cdot e^x + x\cdot e^x - e^x = 0$ *erfüllt*

b2) $y_2 = e^x\cdot u(x)$; $y_2' = e^x\cdot(u+u')$; $y_2'' = e^x\cdot(u''+2u'+u)$

$\Rightarrow (1-x)\cdot(u''+2u'+u) + x\cdot(u+u') - u = 0 \Leftrightarrow \boxed{u''(1-x) + u'(2-x) = 0}$

b3) $u' = p \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}\cdot(1-x) = p\cdot(2-x) \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{x-2}{1-x}dx = -\left(1 - \frac{1}{x-1}\right)dx$

$\ln p = -x + \ln(x-1) + \ln C_1 \Leftrightarrow p(x) = C_1(x-1)e^{-x}$

$\Rightarrow u(x) = C_1(-x)e^{-x} + C_2 \Rightarrow y_2(x) = e^x\cdot u(x) = -C_1 x + C_2 e^x$

2. Lösungsfunktion ist also $y_2(x) = x$. $\Rightarrow AWP$: $\boxed{y_{spez} = 1\cdot x + 1\cdot e^x}$. (s.o.)

A3

a) $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 - z \\ z^2 - y \end{pmatrix}}$; $\textbf{div}\, \vec{v} = \underline{2(x+y+z)}$; $\textbf{grad}\, \vec{v}$ nicht definiert!

$\textbf{rot}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 0+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\vec{0}}.$ Folgerung: Potentialfeld $u(x;y;z)$ existiert

b) $Weg\quad C_1:\ \overrightarrow{r_1(t)} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$; $0 \le t \le 1$; $\overrightarrow{dr_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad \Rightarrow J_1 = \int_0^1 (3t^2 - 2t)\,dt =$

$= \left[t^3 - t^2\right]_0^1 = \underline{0}$

$Weg\quad C_{21}:\ \overrightarrow{r_{21}(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$; $0 \le t \le 1$; $\overrightarrow{dr_{21}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad \Rightarrow J_{21} = \int_0^1 9t^2\, dt =$

$= \left[3t^3\right]_0^1 = \underline{3}$

$Weg\quad C_{22}:\ \overrightarrow{r_{22}(t)} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$; $0 \le t \le 1$; $\overrightarrow{dr_{22}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad \Rightarrow J_{22} = \int_0^1 (4t-5)\,dt =$

$= \left[2t^2 - 5t\right]_0^1 = \underline{-3}$; *also* $J_2 = \underline{0}$

$Weg\quad C_3:\ \overrightarrow{r_3(t)} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$; $0 \le t \le 1$; $\overrightarrow{dr_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \quad \Rightarrow$

$$J_3 = \int_0^1 (3t^8 + 2t^5 - 5t^4 + t^2)\,dt = \left[\frac{t^9}{3} + \frac{t^6}{3} - t^5 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{0}$$

$Weg\quad C_4:\ \overrightarrow{r_4(t)} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{2}t \\ t^3 \\ t \end{pmatrix}$; $0 \le t \le 1$; $\overrightarrow{dr_4} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}t \\ 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad \Rightarrow$

$$J_4 = \int_0^1 \left(\sin^2\frac{\pi}{2}t\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}t + 3t^8 - 4t^3 + t^2\right)dt = \left[\frac{\sin^3\frac{\pi}{2}t}{3} + \frac{t^9}{3} - t^4 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{3} - 1 = \underline{0}$$

c) $\vec{v} = \textbf{grad}\, u$ existiert wegen $\textbf{rot}\, \vec{v} = \vec{0}$: $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 \quad \Rightarrow u(x;y;z) = \frac{x^3}{3} + C(y;z)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} \doteq y^2 - z \quad \Rightarrow C(y;z) = \frac{y^3}{3} - yz + C(z) \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -y + C'(z) \doteq z^2 - y$

$\Rightarrow C'(z) \doteq z^2 \quad \Rightarrow C(z) = \frac{z^3}{3} + C \quad \Leftrightarrow \boxed{u(x;y;z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - yz + C}$

$$also \quad u(1;1;1)-u(0;0;0)=\frac{1}{3}\cdot 3-1+C-C=\boxed{0}$$

A4:

$$\mathbf{det}(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 3 & -1 \\ -3 & 7-\lambda & 3 & -1 \\ 8 & -10 & -1-\lambda & 1 \\ -6 & 16 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1=3;\ \lambda_2=2;\ \lambda_{3/4}=-1$$

$$Spur(A)=3=3+2-1-1$$

$$\boxed{\lambda_1=3:} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 & -1 \\ 8 & -10 & -4 & 1 \\ -6 & 16 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 34 & 12 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rg=3 (1Nullenzeile); Rangabfall: 4 - 3 = 1 $\Rightarrow \quad \vec{a}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\lambda_2=2:} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 3 & -1 \\ 8 & -10 & -3 & 1 \\ -6 & 16 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \ldots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg=3; \quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3=-1:} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ -3 & 8 & 3 & -1 \\ 8 & -10 & 0 & 1 \\ -6 & 16 & 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \ldots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg=3; \quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_4=-1:}$ Ansatz mittels $\vec{y}=\left(\vec{a}_3 x+\vec{b}\right)\cdot e^{-x}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 8 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & -10 & 0 & 1 & -1 \\ -6 & 16 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad rg=3; \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\boxed{\vec{y}=C_1\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot e^{3x}+C_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot e^{2x}+C_3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot e^{-x}+C_4\cdot\begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \\ 2x-1 \end{pmatrix}\cdot e^{-x}.}$$

Kontrolle für $y_1' = 4y_2 + 3y_3 - y_4$ **:**

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= 4C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + C_4x\cdot e^{-x}\\
y_2 &= 3C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + C_4x\cdot e^{-x}\\
y_3 &= 2C_1e^{3x} + \ \ \textbf{.}\ \ - C_3e^{-x} - C_4x\cdot e^{-x}\\
y_4 &= 6C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} + 2C_3e^{-x} + C_4\left(2x-1\right)\cdot e^{-x}
\end{aligned}\right\}$$

$$y_1' = 4y_2 + 3y_3 - y_4 = 4\left(3C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + C_4x\cdot e^{-x}\right) + 3\left(2C_1e^{3x} + \ \ \textbf{.}\ \ - C_3e^{-x} - C_4x\cdot e^{-x}\right)$$

$$-\left(6C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} + 2C_3e^{-x} + C_4\left(2x-1\right)\cdot e^{-x}\right) = \ldots = 12C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} - C_3e^{-x} + C_4\left(-x+1\right)\cdot e^{-x}$$

$$y_1' = 12C_1e^{3x} + 2C_2e^{2x} - C_3e^{-x} + C_4\underbrace{\left(x\cdot e^{-x}\right)'}_{=\left(1-x\right)e^{-x}} \qquad \square$$